

УДК 532.546 : 519.635

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТОКСА В ПРИБЛИЖЕНИИ
БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
МЕТОДОМ МУЛЬТИКВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ***Ш.Х. Зарипов, Р.Ф. Марданов***Аннотация**

Решена задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в стоковом приближении на основе метода коллокаций с применением мультиквадратичных функций (МФ). Метод МФ применен непосредственно к бигармоническому уравнению для функции тока течения, что позволило реализовать безитерационную процедуру численного решения. На примере решения задачи обтекания кругового цилиндра в периодической упаковке показано хорошее согласие результатов, полученных по предложенному методу, с известным аналитическим решением Кувабара.

Ключевые слова: течение Стокса, бигармоническое уравнение, модель Кувабара, метод мультиквадратичных функций

Введение

В настоящее время наряду с традиционными сеточными методами решения дифференциальных уравнений в частных производных продолжают активно развиваться так называемые бессеточные методы. Основными преимуществами последних являются простые формулировка и реализация соответствующего численного алгоритма. Бессеточная схема представления функции – метод мультиквадратичных функций (МФ) – впервые был использован для решения уравнений в частных производных в работах [1, 2]. Для аппроксимации искомой функции использовались радиальные базисные функции (РБФ). Метод МФ применялся для решения задачи о стоковом течении в [3–5]. В указанных работах задача Стокса сводилась к системе двух уравнений второго порядка для компонент скорости течения и вихря. Решение полученной системы осуществлялось итерационным методом. В то же время задача Стокса может быть сформулирована для функции тока течения в виде бигармонического уравнения. Сравнение различных подходов метода МФ к решению уравнения в частных производных четвертого порядка проведено в работе [10]. Измененный метод МФ с использованием частных решений уравнений Лапласа и Пуассона был развит в [6]. Нестационарная задача Стокса решалась в [7].

В настоящей работе решается задача о течении Стокса методом МФ, примененным к бигармоническому уравнению для функции тока. Преимущество такого подхода по сравнению с формулировкой задачи в переменных скорость-завихренность заключается в меньшем числе переменных (функция тока) и безитерационном решении задачи. Возникающая при этом необходимость задания двух граничных условий обеспечивается введением дополнительных точек вблизи границы расчетной области [10]. Описанный подход применен к решению задачи обтекания потоком несжимаемой жидкости цилиндра в периодической ячейке модели Кувабара [8].

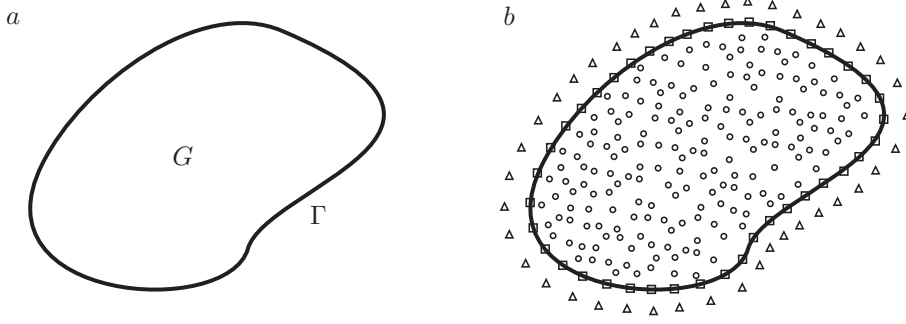


Рис. 1.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса в некоторой области G , ограниченной границей Γ , в рамках приближения течения Стокса (рис. 1, a). Такая задача сводится к решению бигармонического уравнения [9]

$$L\psi = \Delta^2\psi = 0 \quad (1)$$

для функции тока $\psi(x, y)$ с граничными условиями

$$L_1\psi = f_1(x, y), \quad L_2\psi = f_2(x, y), \quad (2)$$

где L_1 и L_2 – операторы, задающие граничные условия Дирихле, Неймана или условия третьего рода, $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ – заданные функции.

Требуется определить функцию тока $\psi(x, y)$, компоненты вектора скорости $u(x, y)$, $v(x, y)$ и завихренность $\omega(x, y)$ в области G .

2. Решение

Суть метода мультиквадрик состоит в аппроксимации искомой функции в виде взвешенной суммы набора РБФ

$$\psi(x, y) = \sum_{j=1}^N \alpha_j r_j(x, y), \quad (3)$$

где α_j – весовые коэффициенты, $r_j(x, y) = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + c^2}$, $j = \overline{1, N}$ – РБФ, $\{x_j, y_j\}$, $j = \overline{1, N}$ – базисные точки, c – параметр метода МФ. Частные производные РБФ записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_j}{\partial x} &= \frac{x - x_j}{r_j}, & \frac{\partial r_j}{\partial y} &= \frac{y - y_j}{r_j}, & \frac{\partial^2 r_j}{\partial x^2} &= \frac{(y - y_j)^2 + c^2}{r_j^3}, \\ \frac{\partial^2 r_j}{\partial y^2} &= \frac{(x - x_j)^2 + c^2}{r_j^3}, & \Delta r_j &= \frac{r_j^2 + c^2}{r_j^3}, & \Delta^2 r_j &= \frac{r_j^4 + 6r_j^2 c^2 - 15c^4}{r_j^7}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив эти выражения в (1) и (2) получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для коэффициентов α_j

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \alpha_j = b_i, \quad i = 1, N, \quad (5)$$

Коэффициенты a_{ij} матрицы СЛАУ и компоненты b_i столбца свободных членов определяются по формулам

$$\begin{aligned} a_{ij} &= Lr_j(x_{ci}, y_{ci}), \quad b_i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, N}, \\ a_{ij} &= L_1 r_j(x_{ci}, y_{ci}), \quad b_i = f_1(x_{ci}, y_{ci}), \quad i = n+1, n+m, \quad j = \overline{1, N}, \\ a_{ij} &= L_2 r_j(x_{ci}, y_{ci}), \quad b_i = f_2(x_{ci}, y_{ci}), \quad i = n+m+1, n+2m, \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где $\{x_{ci}, y_{ci}\}$, $i = \overline{1, N}$ – точки коллокаций, в которых требуется удовлетворение уравнения (1) и граничных условий (2).

При решении задачи Стокса в данной постановке необходимо удовлетворить два граничных условия в каждой точке границы области течения, т.е. количество уравнений в СЛАУ будет больше, чем число неизвестных, которое совпадает с числом базисных точек. Поэтому добавим дополнительные базисные точки, расположенные за границей области течения, как это было сделано в работе [10] для уравнения в частных производных четвертого порядка в общем виде. Количество дополнительных точек должно быть равно количеству граничных точек.

Таким образом множество базисных точек $\{x_j, y_j\}$, $j = \overline{1, N}$, $N = n + 2m$ состоит из набора точек, расположенных в области G , ($j = \overline{1, n}$, на рис. 1, b показаны круглыми символами), набора точек, расположенных на границе Γ , ($j = \overline{n+1, n+m}$, на рис. 1, b показаны квадратными символами) и набора дополнительных точек ($j = \overline{n+m+1, n+2m}$, на рис. 1, b показаны треугольными символами). Так как на границе необходимо удовлетворить два граничных условия (2), то набор точек коллокаций $\{x_{cj}, y_{cj}\}$ зададим в виде: $\{x_{cj}, y_{cj}\} = \{x_j, y_j\}$, $j = \overline{1, n+m}$; $\{x_{cj}, y_{cj}\} = \{x_{j-m}, y_{j-m}\}$, $j = \overline{n+m+1, n+2m}$.

Решив систему (5), найдем коэффициенты α_j и определим $\psi(x, y)$ по формуле (3). Компоненты вектора скорости и завихренность найдем по формулам

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial r_j(x, y)}{\partial y}, \quad v(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial r_j(x, y)}{\partial x}, \\ \omega(x, y) &= -\Delta \psi = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Delta r_j(x, y). \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что предложенный подход использования метода МФ к решению задачи Стокса обладает двумя преимуществами по сравнению с итерационными схемами решения. Он позволяет уменьшить количество отыскиваемых функций и находить решение задачи Стокса без организации итерационного процесса. При этом увеличение порядка решаемого дифференциального уравнения в частных производных не привносит дополнительных вычислительных сложностей.

3. Результаты расчетов

Серия тестовых расчетов проводилась на примере задачи обтекания цилиндра в периодической упаковке в приближении модели Кувабара [8]. Область течения в этом случае представляет собой полукруг радиуса $h > 1$ с выброшенным полукругом единичного радиуса (рис. 2, a).

На поверхности цилиндра BC заданы условия прилипания, которые в терминах функции тока запишем в виде

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad (7)$$

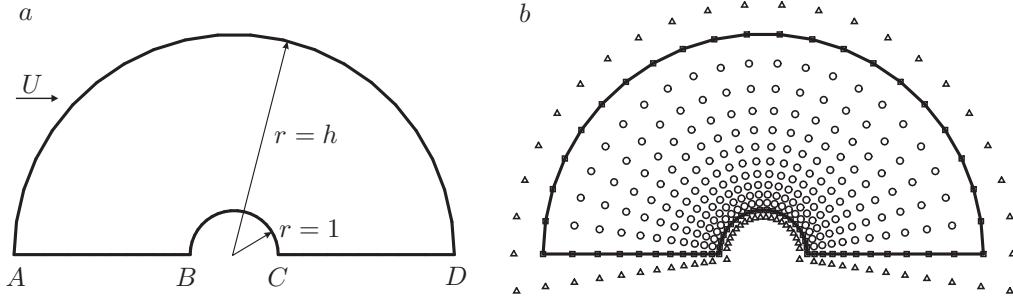


Рис. 2.

где n – внешняя нормаль к границе. Эти граничные условия равносильны условиям $u = v = 0$. На внешней границе AD потребуем удовлетворения граничных условий модели Кувабара

$$u_r = \frac{\partial \psi}{\partial s} = U \cos \theta, \quad \omega = \Delta \psi = 0, \quad (8)$$

где u_r – радиальная компонента вектора скорости, s – касательная к границе, U – заданная скорость внешнего течения, θ – полярный угол. На прямолинейных участках границы AB и CD зададим условия

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (9)$$

первое из которых требует, чтобы эти участки границы являлись линиями тока, а второе есть условие симметрии $\partial u / \partial y = 0$.

Аналитическое решение задачи (1),(7),(8) и (9) получено в работе [8]. Выражения функции тока $\psi^\circ(x, y)$, компонент вектора скорости $u^\circ(x, y)$, $v^\circ(x, y)$ и завихренности $\omega^\circ(x, y)$ записаны в полярной системе координат (r, θ) :

$$\psi^\circ(r, \theta) = \left(\frac{A}{r} + Br + Cr \ln r + Dr^3 \right) \sin \theta, \quad (10)$$

где

$$A = \frac{U}{2} \frac{(1 - \alpha/2)}{k}, \quad B = -\frac{U}{2} \frac{(1 - \alpha)}{k}, \quad C = \frac{U}{k}, \quad D = -\frac{U}{4} \frac{\alpha}{k},$$

$$\alpha = h^{-2}, \quad k = \alpha - \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{2} \ln \alpha - \frac{3}{4}.$$

Компоненты скорости и завихренность получим из (10) в виде

$$u_r^\circ(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^\circ}{\partial \theta} = \left(\frac{A}{r^2} + B + C \ln r + Dr^2 \right) \cos \theta,$$

$$u_\theta^\circ(r, \theta) = -\frac{\partial \psi^\circ}{\partial r} = - \left(-\frac{A}{r^2} + B + C(\ln r + 1) + 3Dr^2 \right) \sin \theta, \quad (11)$$

$$\omega^\circ(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi^\circ}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi^\circ}{\partial \theta^2} = -2 \left(\frac{C}{r} + 4Dr \right) \sin \theta.$$

В качестве набора базисных точек выберем узлы равномерной структурированной радиальной сетки, сгущающейся вблизи поверхности цилиндра, где искомые

функции имеют наибольшие градиенты (рис. 2, *b*). В расчетах будем полагать $U = 1$, $h = 5$. На рис. 3 представлены линии тока и распределение функции завихренности найденные численно методом МФ (рис. 3, *a*) и найденные по аналитическим формулам (10), (11) (рис. 3, *b*). Наблюдается хорошее согласие результатов расчетов.

В ходе расчетов определены распределения абсолютной ($E_\psi(x, y)$, $E_u(x, y)$, $E_v(x, y)$, $E_\omega(x, y)$) и относительной (ε_ψ , ε_u , ε_v , ε_ω) погрешностей функций $\psi(x, y)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$, $\omega(x, y)$:

$$\begin{aligned} E_\psi(x, y) &= \psi^\circ(x, y) - \psi(x, y), & E_u(x, y) &= u^\circ(x, y) - u(x, y), \\ E_v(x, y) &= v^\circ(x, y) - v(x, y), & E_\omega(x, y) &= \omega^\circ(x, y) - \omega(x, y), \\ \varepsilon_\psi &= \frac{\max |E_\psi(x, y)|}{\max |\psi^\circ(x, y)|}, & \varepsilon_u &= \frac{\max |E_u(x, y)|}{\max \sqrt{u^{\circ 2}(x, y) + v^{\circ 2}(x, y)}}, \\ \varepsilon_v &= \frac{\max |E_v(x, y)|}{\max \sqrt{u^{\circ 2}(x, y) + v^{\circ 2}(x, y)}}, & \varepsilon_\omega &= \frac{\max |E_\omega(x, y)|}{\max |\omega^\circ(x, y)|}. \end{aligned}$$

На рис. 4 приведены распределения $E_\psi(x, y)$, $E_u(x, y)$, $E_v(x, y)$, $E_\omega(x, y)$ для случая $N = 642$ при значении параметра $c = 0.37$. Видно, что наименьшее значение погрешности имеет функция $\psi(x, y)$, погрешности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ на порядок больше. Наибольшее значение погрешности имеет функция $\omega(x, y)$, так как она вычисляется как производная второго порядка от функции тока. Значения относительной погрешности составили $\varepsilon_\psi = 0.0065$, $\varepsilon_u = 0.035$, $\varepsilon_v = 0.024$, $\varepsilon_\omega = 0.098$.

В следующей серии расчетов исследовалась зависимость величин относительной погрешности от количества базисных точек и значения параметра c . На рис. 5 представлены графики погрешностей $\varepsilon_\psi(c)$, $\varepsilon_u(c)$, $\varepsilon_v(c)$ и $\varepsilon_\omega(c)$ (сплошные, пунктирные и штриховые линии для $N = 332, 642, 1319$ соответственно). Получены типичные для метода МФ немонотонные зависимости относительной погрешности от параметра c . Функции $\varepsilon_\psi(c)$, $\varepsilon_u(c)$, $\varepsilon_v(c)$ и $\varepsilon_\omega(c)$ принимают минимальное значение для различных значений параметра c , причем эти значения уменьшаются с увеличением N . В качестве оптимального значения параметра c можно выбрать некоторое среднее значение между четырьмя минимумами для функций $\varepsilon_\psi(c)$, $\varepsilon_u(c)$, $\varepsilon_v(c)$ и $\varepsilon_\omega(c)$, обозначим это значение c^* . При проведении расчетов принималось $c^* = 0.5, 0.37, 0.27$ для $N = 332, 642, 1319$ соответственно. Можно сделать вывод, что c^* пропорционально среднему расстоянию между близлежащими базисными точками. Увеличение количества базисных точек не приводит к повышению точности получаемого численного решения, что можно объяснить накоплением вычислительной погрешности.

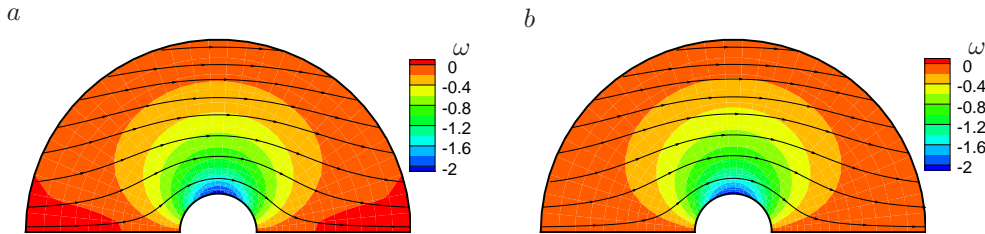


Рис. 3.

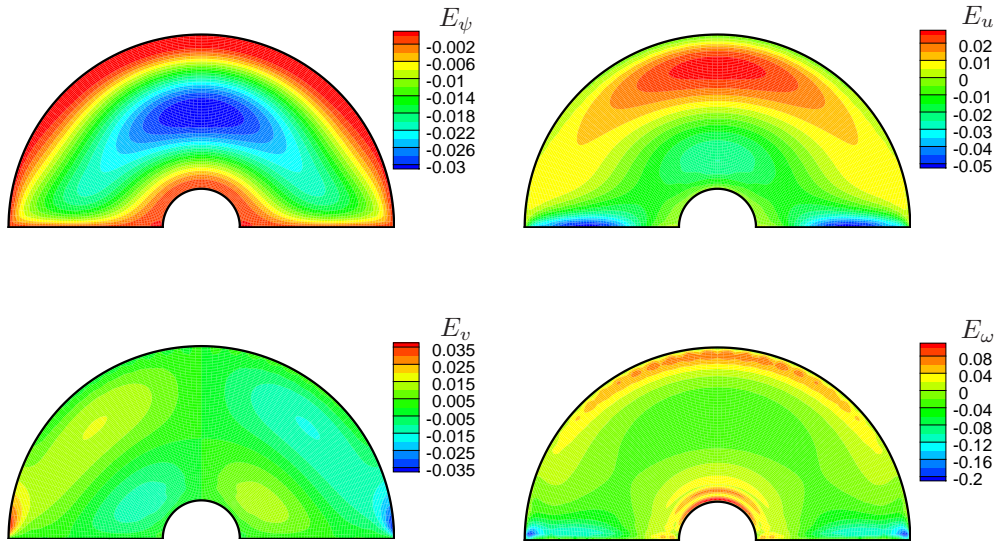


Рис. 4.

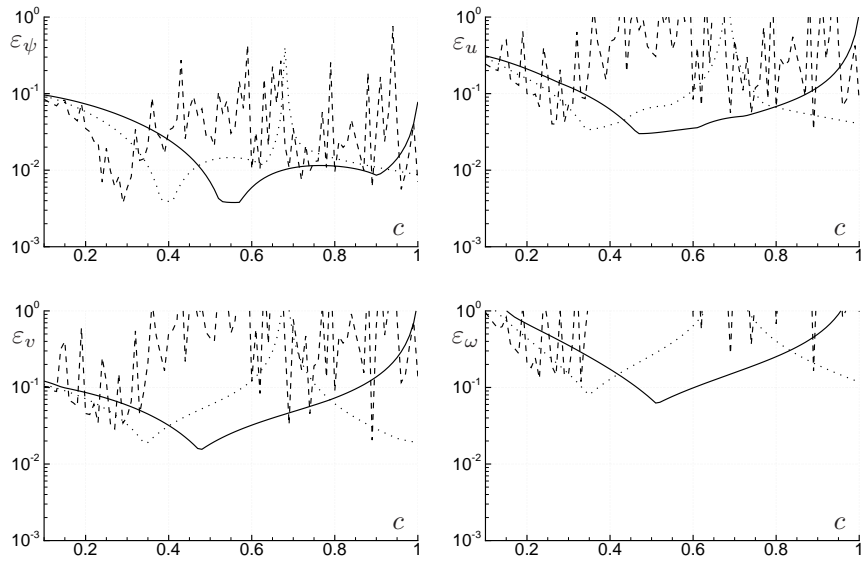


Рис. 5.

Заключение

Разработан эффективный подход к численному решению задачи Стокса, основанный на прямом решении бигармонического уравнения для функции тока методом мультিকвадратичных функций. Основными преимуществами такого подхода по сравнению с известными является уменьшение числа искомых функций и безитерационная процедура решения. Метод протестирован на решении задачи

обтекания цилиндра в периодической упаковке в рамках ячеечной модели Кувабара. Сравнение полученных результатов с известным аналитическим решением показало их высокую точность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №12-01-00333, 12-07-00007).

Summary

S.K. Zaripov, R.F. Mardanov. Solution of Stokes flow problem using biharmonic equation formulation and multiquadrics method.

The biharmonic equation formulation of the Stokes flow problem for multiquadrics method is developed. The main advantage of the approach is the iteration free method to find the solution. The numerical method is applied for the problem of steady incompressible fluid flow past a cylinder in the periodic cell of the Kuwabara model. The comparison with known analytical solution and the analysis of absolute and relative errors show that proposed approach gives satisfactory accuracy. The nonmonotonic dependence of the relative errors on the shape parameter typical for multiquadrics method is observed.

Key words: Stokes flow, biharmonic equation, Kuwabara model, multiquadrics method.

Литература

1. E. Kansa, Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—i surface approximations and partial derivative estimates, *Computers & Mathematics with Applications* 19 (8-9) (1990) 127 – 145.
2. E. Kansa, Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—ii solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Computers & Mathematics with Applications* 19 (8-9) (1990) 147 – 161.
3. D. Young, S. Jane, C. Lin, C. Chiu, K. Chen, Solutions of 2d and 3d stokes laws using multiquadrics method, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 28 (10) (2004) 1233 – 1243, mesh Reduction Technique Part {II}.
4. S. Chantasiriwan, Solutions to harmonic and biharmonic problems with discontinuous boundary conditions by collocation methods using multiquadrics as basis functions, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 34 (3) (2007) 313 – 320.
5. S. S. Kutanaei, N. Roshan, A. Vosoughi, S. Saghafi, A. Barari, S. Soleimani, Numerical solution of stokes flow in a circular cavity using mesh-free local rbf-dq, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 36 (5) (2012) 633 – 638.
6. C. Bustamante, H. Power, Y. Sua, W. Florez, A global meshless collocation particular solution method (integrated radial basis function) for two-dimensional stokes flow problems, *Applied Mathematical Modelling* 37 (6) (2013) 4538 – 4547.
7. A. Golbabai, H. Rabiei, A meshfree method based on radial basis functions for the eigenvalues of transient stokes equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 36 (11) (2012) 1555 – 1559.
8. S. Kuwabara, The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres in a viscous flow at small reynolds numbers, *Journal of Physical Society of Japan* 14 (4) (1959) 527 – 532.
9. J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics with Special Application to Particulate Media*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.

10. G. Yao, C.H. Tsai, W. Chen The comparison of three meshless methods using radial basis functions for solving fourth-order partial differential equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 34 (2010) 625–631.

Зарипов Шамиль Хузеевич – докт. физ.-мат. наук, профессор, зав. каф. моделирования экосистем Казанского (приволжского) федерального университета

E-mail: *Shamil.Zaripov@kpfu.ru*

Марданов Ренат Фаритович – канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент каф. аэрогидромеханики Казанского (приволжского) федерального университета

E-mail: *Renat.Mardanov@kpfu.ru*